ZQ	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ et produit eulérien	L 121 L 223 L 235 L 241 L 230

Th : On note $\mathbb{P} = (p_n)_{n\geq 1}$ la famille ordonnée des nombres premiers.

① La série des inverses des nombres 1ers $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

② $\forall s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolument.

De plus, on a : $\forall s \in \Omega_1$, $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \neq 0$.

Démonstration : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$.

On note $p_1 < \dots < p_k$ les nombres 1ers inférieurs ou égaux à N ($k = \pi(N)$)

et $\mathcal{E}(N) = \{ p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \}$ l'ensemble des entiers dont les diviseurs premiers valent au plus N.

D'après le th fondamental de l'arithmétique, on a $[\![1, N]\!] \subset \mathcal{E}(N)$.

On considère, $\forall s \in \Omega_0$, le produit $P_N(s) = \prod_{i=1}^{\pi(N)} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}}$.

Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $\left| \frac{1}{p^s} \right| = \frac{1}{p^{Re(s)}} < 1$,

on a : $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha s}}$.

Ainsi, $\forall s \in \Omega_0$, $P_N(s) = \prod_{i=1}^{\pi(N)} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{s\alpha}}$.

On cherche à intervertir les signes π et Σ, 2 cas sont favorables.

① Un argument de positivité (dans $[0;+\infty]$) pour $s = 1$ (à fortiori $s \in]0,1]$)

De plus, en prenant le logarithme d'un produit infini > 0, on se ramènera à une série.

② Un argument d'intégrabilité (par rapport à la mesure de comptage) pour $s \in \Omega_1$

on aura alors convergence du produit infini.

Or aucun des termes ne sont nuls donc le produit sera non nul.

(1) On a : $P_N(1) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha_i}} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k} \frac{1}{p_1^{\alpha_1}\times\dots\times p_k^{\alpha_k}}$

$$\underset{\text{TFA}}{=} \sum_{n\in\mathcal{E}(N)} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1) > \ln(N)$$

Ainsi, par comparaison, $P_N(1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$

De plus, $\ln(P_N(1)) = \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}}\right) = \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}}\right)$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{p_i} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2 - p_i}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + 1$$

D'où $\forall N \geqslant 2, \sum_{i=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_i} \geqslant \ln(P_N(1)) - 1 > \ln(\ln(N)) - 1$

Ainsi qd $N\to\infty$, on a nécessairement $\pi(N)\to\infty$ (il y a une infinité de nb 1$^{\text{ers}}$)

et, de façon plus appuyé, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

(2) Soit $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>1$. On a $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$

Or d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ CV donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ CVA.

Soit $N\geqslant 2$. Sachant ${}^c(\mathcal{E}(N)) \subset {}^c[\![1,N]\!]$, on a :

$$\left|\zeta(s) - P_N(s)\right| = \left|\zeta(s) - \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}}\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} - \sum_{n\in\mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s}\right|$$

$$= \left|\sum_{n\in{}^c\mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n\in{}^c\mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant \sum_{n\in{}^c[\![1,N]\!]} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ comme reste d'une série CV}$$

D'où $\lim_{N\to\infty} P_N(s) := \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \zeta(1) \neq 0$.